Übungen zu Mathematik I
Blatt 5

Aufgabe 1: Entscheiden Sie, ob die folgenden Vektoren linear unabhängig sind, indem Sie die Determinante berechnen!

a) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

b) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2: Wir betrachten die Primzahlfunktion $\pi(x)$, die verbal beschrieben folgende Abbildung definiert:

> Die Primzahlfunktion ordnet jeder reellen Zahl die größer oder gleich null ist die Anzahl der Primzahl zu, die nicht größer sind als die reelle Zahl.

a) Berechnen Sie $\pi(10)$.

b) Wie lauten Definitions- und Wertemenge der Primzahlunktion?

c) Überlegen Sie sich, wie der Funktionsgraph aussieht und beschreiben Sie diesen, ohne ihn zu zeichnen.

d) Zeichnen Sie die Funktion im Intervall $[0, 20]$. Überlegen Sie sich, wie sie am sinnvollsten vorgehen!

Hinweis: Wenn Sie nicht wissen, was unter Primzahlen verstanden wird, oder eine Primzahltabelle benötigen, suchen Sie bitte eigenständig im Internet!

Aufgabe 3: Das ideale Gasgesetz lautet:

$$p \cdot V = m \cdot R_s \cdot T \,,$$

wobei R_s die spezifische Gaskonstante beschreibt und p, m und V für den Druck, die Masse und das Volumen des Gases stehen.

a) Wir betrachten den Druck in Abhängigkeit von den anderen Größen. Stellen Sie eine Funktion auf. Wie lauten die Veränderlichen? Wie ändert sich der Druck, wenn das Volumen verkleinert wird? Überlegen Sie zuerst physikalisch und verifizieren Sie ihre Überlegungen mit Hilfe der Funktion.

b) Wie ändert sich die Temperatur, wenn wir den Druck erhöhen?

c) Wir halbieren die Masse. Wie ändert sich die Temperatur?

Aufgabe 4: Der Zusammenhang zwischen angelegter Spannung U_D und fließendem Strom I_D im Durchlassbereich einer Diode wird näherungsweise von der Shockley-Gleichung beschrieben:

$$I_D(U_D) = I_S \cdot \left(e^{\frac{U_D}{n \cdot U_T}} - 1 \right)$$

Hierbei bezeichnet $I_s \approx 10^{-12} \ldots 10^{-6}$ A den Sperrstrom, $n \approx 1 \ldots 2$ den Emissionskoeffizienten und

$$U_T = \frac{k \cdot T}{q}$$

die Temperaturspannung, die bei Raumtemperatur ungefähr 25 mV beträgt. Hierbei ist T die absolute Temperatur, $k = 1,381 \cdot 10^{-23}$ Ws/K bezeichnet die Bolzmannkonstante und $q = 1,602 \cdot 10{-}19$ As die Elementarladung.

a) Wie hängt der Diodenstrom mit der Diodenspannung zusammen, d.h. was passiert, wenn die Spannung vergrößert oder verkleinert wird?

b) Was passiert wenn wir den Sperrstrom halbieren bzw. verzehnfachen?

c) Wir interessieren uns für die Temperaturabhängigkeit des Zusammenhangs, d.h. den Effekt, den eine Temperaturerhöhung oder -senkung hat. Überlegen Sie sich zuerst, wie sich U_T mit der Temperatur ändert. Übertragen Sie diese Ergebnisse dann auf die e-Funktion und den gesamten Ausdruck.

d) Welchen Einfluss hat es, wenn wir den Emissionskoeffizienten von $n = 1$ auf $n = 2$ erhöhen?